

# الحدوديات

\*- التمكن من تقنية القسمة الإقليدية على  $x - a$  وإدراك قابلية القسمة على  $x - a$ .

## I - الحدودية: كتابة و مصطلحات - تساوي حدودتين

### 1- أنشطة

#### نشاط 1

لتكن الأعداد  $x$  و  $x+3$  و  $x+5$  أبعاد متوازي المستطيلات و  $V(x)$  حجمه  
حدد  $V(x)$

$$V(x) = x(x+3)(x+5) = x^3 + 8x^2 + 15x$$

التعبير  $x^3 + 8x^2 + 15x$  يسمى تعبيرا حدوديا أو حدودية

$x^3$  هو الحد الذي له أكبر أس ( هذا الأس هو 3 ) نقول إن درجة الحدودية  $V(x)$  هو 3

$$d^\circ(V(x)) = 3 \text{ نكتب}$$

#### نشاط 2

حدد من بين التعبيرات التالية تلك التي تمثل حدوديات وحدد درجاتها

$$P(x) = \frac{1}{3}x^5 - 3x^3 + 4x - 1 ; Q(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3 ; H(x) = -6$$

$$T(x) = 3x^2 + 2|x| ; G(x) = 2\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} ; K(x) = 2x^4 - 2\sqrt{x} + 2 ; N(x) = 0$$

\*  $P(x)$  حدودية تتكون من أربعة حدود هي:  $-1$  و  $4x$  و  $-3x^3$  و  $\frac{1}{3}x^5$

العدد 3 هو درجة الحد  $-3x^3$  و  $-3$  معامل الحد  $-3x^3$

العدد 5 هو درجة الحد  $\frac{1}{3}x^5$  و  $\frac{1}{3}$  معامل الحد  $\frac{1}{3}x^5$

درجة الحدودية  $P(x)$  هو 5 نكتب  $d^\circ(P(x)) = 5$

\*  $Q(x)$  حدودية تتكون من 3 حدود .  $d^\circ(Q(x)) = 2$

\*  $H(x)$  حدودية تتكون من حد واحد.  $d^\circ(H(x)) = 0$

\* كل تعبير من التعبيرات  $T(x)$  و  $G(x)$  و  $K(x)$  ليس حدودية

\*  $N(x)$  حدودية منعدمة ليست لها درجة

الحدودية المنعدمة هي كل حدودية معاملاتها منعدمة.

#### نشاط 3

اختصر الحدودية  $P(x) = -2x^5 + 3x^3 - 4x^4 + x^3 + x + x^2 - x^4$

اختصار حدودية هو كتابتها على شكل مجموع حدود درجاتها مختلفة مثني مثني

الشكل المختصر للحدودية  $P(x)$  هو  $P(x) = -2x^5 - 5x^4 + 4x^3 + x^2 + x$

#### نشاط 2

1- هل الحدوديتين  $P$  و  $Q$  متساويتان في كل الحالات

$$Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3 \quad P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \quad *$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x^2 - 4x + 1 \quad P(x) = (\sqrt{2}-1)x^2 - 4x + 1 \quad *$$

$$Q(x) = x^2 - 3x^3 + x \quad P(x) = -3x^3 + x^2 - x \quad *$$

2- لتكن  $P(x) = (a+b)x^3 + (b-c)x^2 + (a-c+1)x$  حدد  $a$  و  $b$  و  $c$  لكي تكون  $P(x)$  حدودية منعدمة.

## 2- تعاريف

### تعريف 1

لتكن  $P(x)$  حدودية مختصرة و غير منعدمة، درجة  $P(x)$  هي درجة الحد الذي له أكبر درجة نرسم لها بالرمز  $d^\circ(P(x))$

**ملاحظة:** الحدودية المنعدمة ليست لها درجة

### تعريف 2

تكون حدوديتان، مختصرتان غير منعدمتين، متساويتين إذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات حدودها من نفس الدرجة متساوية مثلى مثلى

## 3- حالات خاصة

\* كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل  $ax + b$

حيث  $a \in \mathbb{R}^*$  ;  $b \in \mathbb{R}$

\* الحدودية من الدرجة الثانية تسمى ثلاثية الحدود و تكتب على شكل  $ax^2 + bx + c$

حيث  $a \in \mathbb{R}^*$   $(b; c) \in \mathbb{R}^2$

## II- مجموع و جداء

### 1- أنشطة

أ- أحسب  $P(x) + Q(x)$  و  $P(x) - Q(x)$  مع مقارنة  $d^\circ(P + Q)$  و  $d^\circ(P) + d^\circ(Q)$

$$Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x - 3$$

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

$$Q(x) = 4x^6 - 3x^3 - 4x^2 - 6$$

$$P(x) = -4x^6 + 2x^3 - 6x^2 + 1$$

ب- أحسب  $P(x) \times Q(x)$  مع مقارنة  $d^\circ(P \times Q)$  و  $d^\circ(P) + d^\circ(Q)$

$$Q(x) = 2x^2 - 6x - 3$$

$$P(x) = -3x + 2$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 3$$

$$P(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

ج - عمل

$$Q(x) = (x+1)^3 - 27(x-1)^3$$

$$P(x) = (x-3)^2 - (5x+6)^2$$

### 2- خاصيات

\* مجموع حدوديتين  $P$  و  $Q$  هو حدودية يرمز لها بـ  $P + Q$

**ملاحظة:**  $d^\circ(P + Q) \leq \sup(d^\circ(P); d^\circ(Q))$

\* فرق حدوديتين  $P$  و  $Q$  هو حدودية يرمز لها بـ  $P - Q$

**ملاحظة:**  $d^\circ(P - Q) \leq \sup(d^\circ(P); d^\circ(Q))$

\* جداء حدوديتين  $P$  و  $Q$  هو حدودية يرمز لها بـ  $P \times Q$

**ملاحظة:**  $d^\circ(P \times Q) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$

## III- جذر حدودية - القسمة على $x-a$

### 1) جذر حدودية

#### تعريف

لتكن  $P(x)$  حدودية و  $\alpha$  عددا حقيقيا

نقول إن العدد  $\alpha$  جذر للحدودية  $P(x)$  إذا كان  $P(\alpha) = 0$

#### أمثلة

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

حدد من بين الأعداد التالية 1 و -1 و 2 و -3، تلك التي تمثل جذرا لـ  $P(x)$

## (2) القسمة على $x-a$

### أنشطة

أ- نعتبر  $P(x) = x^3 + x + 1$

- أحسب  $P(3)$

- حدد حدودية  $Q(x)$  حيث

$$P(x) - P(3) = (x - 3)Q(x)$$

ب- نعتبر  $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - x - 2$

- حدد حدودية  $Q(x)$  حيث

$$P(x) - P(1) = (x - 1)Q(x)$$

- حدد حدودية  $Q'(x)$  حيث

$$P(x) - P(2) = (x - 2)Q'(x)$$

### أ- خاصة

لتكن  $P(x)$  حدودية درجتها  $n$  حيث  $n \geq 1$  و  $\alpha$  عددا حقيقيا .

توجد حدودية وحيدة  $Q(x)$  درجتها  $n-1$  حيث  $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

$Q(x)$  خارج القسمة الاقليدية للحدودية  $P(x)$  على  $x - \alpha$

$P(\alpha)$  باقي القسمة الاقليدية للحدودية  $P(x)$  على  $x - \alpha$

### ب- تقنية لحساب الخارج و الباقي

لنحدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ  $P(x)$  على  $x - 3$

حيث  $P(x) = -3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$

|                               |                           |
|-------------------------------|---------------------------|
| $-3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ | $x - 3$                   |
| $3x^4 - 9x^3$                 | $-3x^3 - 7x^2 - 22x - 71$ |
| $-7x^3 - x^2$                 |                           |
| $7x^3 - 21x^2$                |                           |
| $-22x^2 - 5x$                 |                           |
| $22x^2 - 66x$                 |                           |
| $-71x + 1$                    |                           |
| $71x - 213$                   |                           |
| $-212$                        |                           |

ملاحظة  $P(3) = -212$

\*  $P(x) = -2x^5 - x^2 + 3x - 2$

حدد خارج و باقي القسمة الاقليدية لـ  $P(x)$  على  $x - 2$

### ج- قابلية القسمة على $x-a$

#### تعريف

لتكن  $P(x)$  حدودية درجتها  $n$  حيث  $n \geq 1$  و  $\alpha$  عددا حقيقيا

نقول إن  $P(x)$  تقبل القسمة على  $x - \alpha$  إذا وجدت حدودية  $Q(x)$  درجتها  $n-1$

حيث  $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

ملاحظة:  $P(\alpha) = 0$

**تمرين** نعتبر  $P(x) = x^3 - x - 6$

حدد حدودية  $Q(x)$  حيث  $P(x) = (x - 2)Q(x)$

نلاحظ أن  $P(2) = 0$

لتكن  $P(x)$  حدودية درجتها  $n$  حيث  $n \geq 1$  و  $\alpha$  عددا حقيقيا  
نقول إن  $P(x)$  تقبل القسمة على  $x - \alpha$  إذا و فقط إذا كان  $\alpha$  جذرا للحدودية  $P(x)$ .

**تمرين** نعتبر  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

1- تأكد أن  $P(x)$  تقبل القسمة على  $x - 3$

2- بإنجاز القسمة الاقليدية حدد حدودية  $Q(x)$  حيث  $P(x) = (x - 3)Q(x)$

3- بين أن  $-1$  جذرا للحدودية  $Q(x)$ . عمل  $Q(x)$ .

استنتج تعميلا للحدودية  $P(x)$ .

**تمرين**  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

1- أحسب  $P(-2)$  و  $P(1)$  و  $P(3)$

2- أنجز القسمة الاقليدية لـ  $P(x)$  على  $x + 2$

3- بين إذا كان  $\alpha$  جذرا غير منعدم لـ  $P(x)$  فإن  $\frac{1}{\alpha}$  جذر لـ  $P(x)$ . استنتج الجذور الثلاث.

**تمرين**  $P(x) = 2x^3 + mx^2 - 11x - 6$

1- حدد  $m$  حيث  $P(x)$  تقبل القسمة على  $x - 2$

2- نضع  $m = 3$ . أحسب  $P(-3)$ .

استنتج تعميلا للحدودية  $P(x)$ .