المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

القدرات المنتظرة

*- إدراك العلاقات بين الأعداد والتمييز بين مختلف مجموعات الأعداد.

*- تحديد كتابة مناسبة لتعبير جبري حسب الوضعية المدروسة.

I) المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

أنشطة

$a \in E$ تعني a عنصر من E و تقرأ a تنتمي الى E

ضع العلامة × في الخانة المناسبة

$1{,}33\ldots\ldots$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{2}$	π	$\frac{22}{7}$	-4	$3{,}14$	$-\frac{250}{3}$	5	
									$\in \mathbb{N}$
									$\in \mathbb{Z}$
									$\in ID$
									$\in \mathbb{Q}$
									$\in \mathbb{R}$

1- مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

تذكير

*مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية هي $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5\ldots\ldots\ldots\ldots \to\}$

الاعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة الاعداد الصحيحة النسبية يرمز لها بـ $\mathbb{Z}$

نكتب $\mathbb{Z} = \{\leftarrow \ldots\ldots;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;\ldots\ldots \to\}$

-5 عدد صحيح نسبي نكتب $-5 \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}$ ليس عددا صحيحا نسبيا نكتب $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

0 العدد الصحيح النسبي المنعدم

* نرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة النسبية الغيلر المنعدمة بـ $\mathbb{Z}^*$

$$\mathbb{Z}^* = \{\leftarrow \ldots\ldots;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;\ldots\ldots \to\}$$

ملاحظة: كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي

نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ جزء من المجموعة $\mathbb{Z}$ أو المجموعة $\mathbb{N}$ ضمن المجموعة $\mathbb{Z}$

نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2- مجموعة الأعداد العشرية النسبية

اكتب الاعداد التالية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$

3,12 ، 7 ، -3 ، -0,256

تعريف

كل عدد له كتابة كسرية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ يسمى عددا عشريا نسبيا.

نرمز لمجموعة الاعداد العشرية النسبية بـ ID

نتائج

أ – العدد العشري له كتابة بعدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة.

ب- كل عدد صحيح نسبي a هو عدد عشري نسبي (لأنه يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{10^0}$)

إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID$

3- مجموعة الأعداد الجذرية

تعريف

العدد الجذري هو كل عدد يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{b}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$

يرمز لمجموعة الاعداد الجذرية بـ $\mathbb{Q}$

$\frac{-3}{7}$ عدد جذري ، 6 عدد جذري $-1,36$ عدد جذري π ليس عددا جدريا

$\sqrt{3}$ ليس عددا جدريا

نتيجة

كل عدد عشري نسبي هو عدد جدري

إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q}$

4- مجموعة الأعداد الحقيقية

- بين أن $\sqrt{2}$ عدد لا جذري

أرسم مربع ضلعه 1 و حدد طول قطره

- نصف محيط دائرة شعاعها 1 هو عدد لا جذري يرمز له بـ π

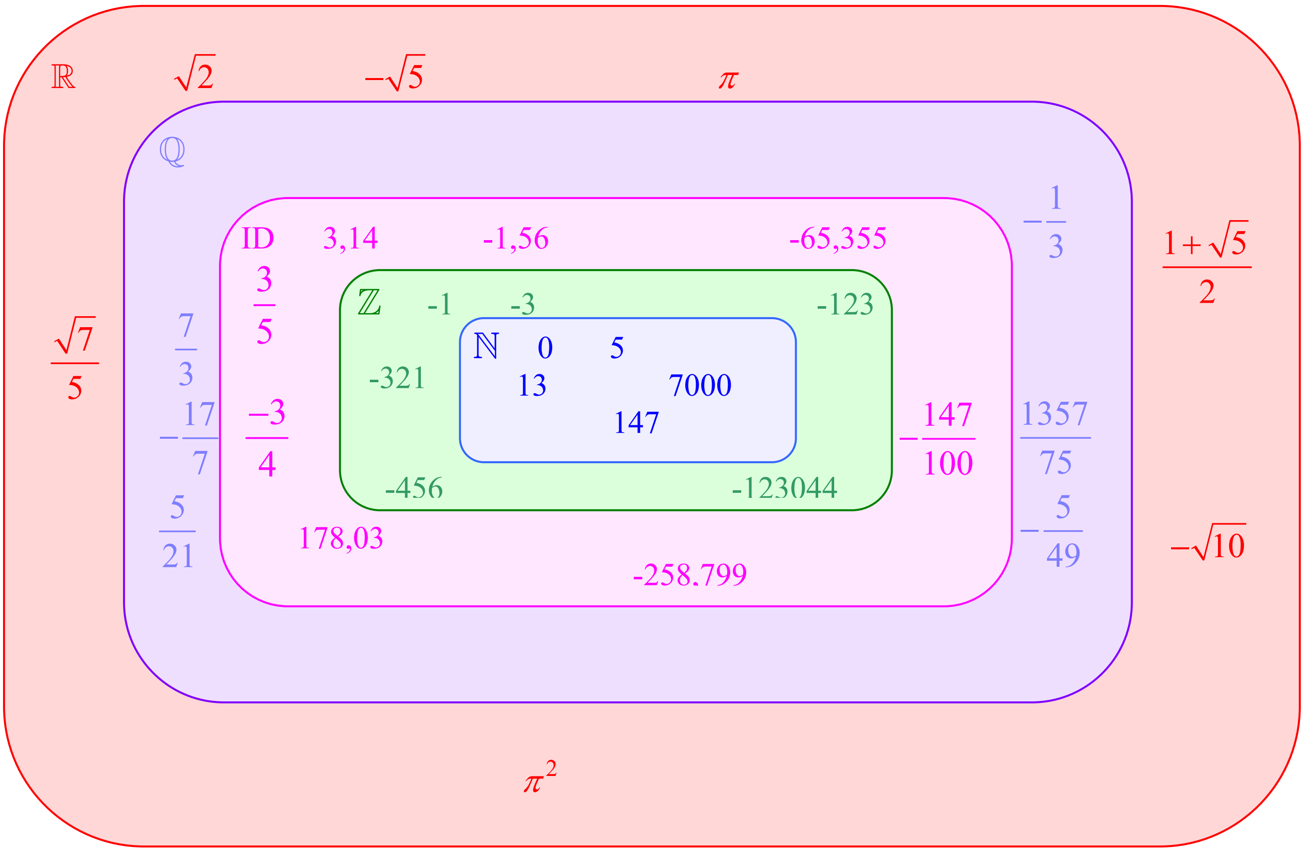
توجد مقادير لا يمكن التعبير عنها بأعداد جذرية ، مثل هذه المقادير نعبر عنها باعداد لا جذرية.

الاعداد الجذرية و الاعداد لا جذرية تكون مجموعة تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية

يرمز لها بـ $\mathbb{R}$

نتيجة

كل عدد جذري هو عدد حقيقي إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

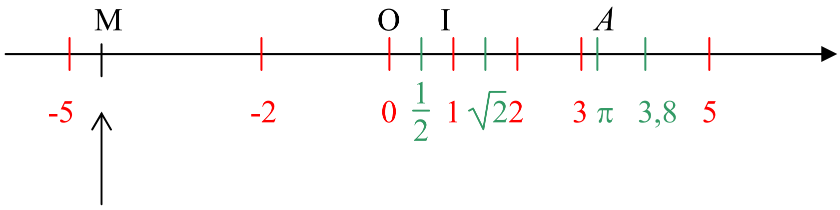


تمثيل المجموعة $\mathbb{R}$

نمثل المجموعة $\mathbb{R}$ على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

كل نقطة من المستقيم $\Delta(O;I)$ تقبل عددا وحيدا أفصولا لها

كل عدد حقيقي هو افصول لنقطة و حيدة من المستقيم $\Delta(O;I)$



أفصول M في المعلم (O ;I)

A هي النقطة ذات الافصول π نكتب $A(\pi)$

II) العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ و خاصياتها

1 – أنشطة

نشاط1

1- أحسب $-\frac{2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $\qquad$ $\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$

2- لتكن a و b و c أعداد حقيقية

أحسب $-2(a+b-c)-3(a-b+c)+4(5a-b)$

نشاط2

1- أحسب $\sqrt{5^2\times3^3}+\sqrt{75}-11\sqrt{3}+2\sqrt{243}$ و $(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5})$

2- أ- أحسب $(2-\sqrt{5})^2$ ثم بسط $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

ب- بسط $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$; $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

3- اجعل المقام عددا جذريا للعددين الحقيقيين $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

4- بين أن $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=4$

نشاط3

1- عمل $(x+2)^2+x^2-4$ ، $(2x-1)^2-(3x+2)^2$ ، $27x^3-8$; $x^3+125-5x(x+5)$

2- نضع $a+b=1$; $a^2+b^2=2$ أحسب a^4+b^4 ; a^6+b^6

2- الجمع و الضرب

أ- الجمع

* الجمع تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a+b=b+a$

* الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $\quad (a+b)+c=a+(b+c)$

* 0 هو العنصر المحايد للجمع في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $\quad 0+a=a+0=a$

* لكل عدد حقيقي a مقابل هو $-a$: $\quad -a+a=a+(-a)=0$

ب- الطرح

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a-b=a+(-b)$

ج- الضرب

* الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a\times b=b\times a$

* الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $\quad (a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

* 1 هو العنصر المحايد لضرب في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $\quad 1\times a = a\times 1 = a$

* لكل عدد حقيقي غير منعدم a مقلوب هو $\frac{1}{a}$ $\quad (a^{-1})$: $\quad a^{-1}\times a = a\times a^{-1} = 1$

* الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$

$$(b+c)\cdot a = ba + ca \quad ; \quad a\cdot(b+c) = ab + ac$$

د- الخارج

ليكن a من $\mathbb{R}$ و b من $\mathbb{R}^*$ $\quad \frac{a}{b} = a\times\frac{1}{b}$

ذ- قواعد

* لتكن a و b و c من $\mathbb{R}$: $a = b$ تكافئ $a+c = b+c$
* لتكن a و b من $\mathbb{R}$ و c من $\mathbb{R}^*$: $a = b$ تكافئ $ac = bc$
* لكل a و b و c و d من $\mathbb{R}$

إذا كان $a = b$ و $c = d$ فان $a+c = b+d$

إذا كان $a = b$ و $c = d$ فان $ac = bd$

* $ab = 0$ تكافئ $a = 0$ أو $b = 0$

$ab \neq 0$ تكافئ $a \neq 0$ و $b \neq 0$

* لكل a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ تكافئ $ad = bc$

* a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d} = \frac{ab}{cd} \quad ، \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

* لكل a من $\mathbb{R}$ و b و c و d من $\mathbb{R}^*$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \quad ، \quad \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b}$$

2- الجذور المربعة

أ- تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}^+$

العدد الحقيقي الموجب y الذي يحقق $y^2 = x$ يسمى لجذر المربع للعدد الموجب x.

نرمز للجذر مربع للعدد x بـ $\sqrt{x}$

$x = y^2 \quad ; \quad y \geq 0$ تكافئ $y = \sqrt{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^+$

ب- نتائج

*- ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad ; \quad \sqrt{x^2} = x \quad ; \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

$$(y \neq 0) \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$\sqrt{x} = \sqrt{y}$ تكافئ $x = y$

* إذا كان x سالبا فان $\sqrt{x^2} = -x$

ملاحظة: لكل عدد حقيقي موجب a يوجد عددان حقيقيان مربعهما يساوي a هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

3- القوى
أ- تعريف

* ليكن a من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ......\times a}_{n \text{ عاملا}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

العدد a^n يسمى قوة العدد a ذات الأس n

العدد a^{-n} يسمى قوة العدد a ذات الأس $-n$

* ليكن a من $\mathbb{R}^*$ $\quad a^0 = 1$

ب- نتائج

-* لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ و لكل n و m من $\mathbb{Z}$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \qquad x^n x^m = x^{n+m}$$

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \qquad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \qquad \left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m}$$

* لكل عدد حقيقي موجب x : $\sqrt{x^n} = \sqrt{x}^n$

حالة خاصة لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad x^1 = x$

ج- الكتابة العلمية لعدد عشري

خاصية (مقبولة)

كل عدد عشري b موجب يكتب على شكل $a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية للعدد b

أمثلة

الكتابة العلمية للعدد 1740000 هي $1,74 \times 10^6$

الكتابة العلمية للعدد $0,000325$ هي $3,25 \times 10^{-4}$

نتيجة:

كل عدد عشري b سالب يكتب على شكل $-a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

$$-1,74 \times 10^6 = -1740000 \qquad -0,000325 = -3,25 \times 10^{-4}$$

4- متطابقات هامة

ليكن a و b من $\mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

5- النشر و التعميل

نشر جداء هو تحويله إلى مجموع

تعميل مجموع هو تحويله إلى جداء