الحساب المثلثي (ج3)

I- صيغ التحويل

1- تحويل $\cos(x-y)$ و $\cos(x+y)$

نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مرتبط بالدائرة المثلثية (C)

ليكن x و y عددين حقيقيين. و لتكن M و M' نقطتين أفصوليهما المنحنيين x و y على التوالي

ومنه $M(\cos x;\sin x)$ و $M'(\cos y;\sin y)$

وبالتالي $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

و حيث أن $(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM})\equiv x-y\quad[2\pi]$ فان $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=OM.OM'\cos(x-y)$

و بما أن $OM=OM'=1$ فان $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos(x-y)$

إذن $\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

تحويل $\cos(x+y)$

$$\cos(x+y)=\cos(x-(-y))$$
$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin(-y)$$
$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$$

2- تحويل $\sin(x-y)$ و $\sin(x+y)$

$$\sin(x-y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(x-y)\right)$$
$$\sin(x-y)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+y\right)$$
$$\sin(x-y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$

تحويل $\sin(x+y)$

خلاصة

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+y)&=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y\\ \cos(x-y)&=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y\\ \sin(x+y)&=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y\\ \sin(x-y)&=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y\end{aligned}}$$

3- تحويل $\tan(x+y)$ و $\tan(x-y)$

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و $\tan x.\tan y\neq 1$.

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$
$$\tan(x+y)=\frac{\sin x.\cos y+\cos x.\sin y}{\cos x.\cos y-\sin x.\sin y}$$

$$\tan(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x.\cos y+\cos x.\sin y}{\cos x.\cos y}}{\dfrac{\cos x.\cos y-\sin x.\sin y}{\cos x.\cos y}}$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$$

تحويل $\tan(x-y)$

$$\tan(x-y)=\tan(x+(-y))$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x+\tan -y}{1-\tan x.\tan -y}$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$$

خلاصة

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(x+y)&=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}\\ \tan(x-y)&=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}\end{aligned}}$$

تمرين

أحسب النسب المثلثية للعدد $\frac{7\pi}{12}$ (لاحظ أن $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$)

تمرين

أكتب $\cos x+\sin x$ بدلالة $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

II- نتائج

1- في صيغ التحويل السابقة بوضع $x=y$ نحصل على

$$\boxed{\begin{aligned}\sin 2x&=2\sin x\cos x\\ \cos 2x&=\cos^2 x-\sin^2 x\\ \cos 2x&=2\cos^2 x-1\\ \cos 2x&=1-2\sin^2 x\\ \tan 2x&=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}}$$

تمرين

أحسب النسب المثلثية للعدد $\frac{\pi}{8}$

تمرين

بين أن $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ و $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

2- تحديد النسب المثلثة للعدد x بدلالة $t=\tan\frac{x}{2}$

لدينا $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

نقسم البسط و المقام بالعدد $\cos^2\frac{x}{2}$ ومنه $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ أي $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

باستعمال العلاقات $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$ و نفس الطريقة نحصل على $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

خلاصة

بوضع $\tan\frac{x}{2} = t$
$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

III - تحويل مجموع إلى جداء

لدينا

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$$
$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y$$

بوضع $x+y=p$ و $x-y=q$ أي أن $x = \frac{p+q}{2}$ و $y = \frac{x-y}{q}$

نحصل على النتائج

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

تمرين

أكتب $\cos 3x + \cos 7x$ على شكل جد اء

تمرين

في مثلث ABC

بين أن $\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = 4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\times\cos\frac{\widehat{B}}{2}\times\cos\frac{\widehat{C}}{2}$

تمرين

بين أن $\sin^2\frac{5x}{2} - \cos^2\frac{3x}{2} = -\cos 4x.\cos x$

VI- تحويل جداء الى مجموع

مما سبق نستنتج أن

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$
$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

تمرين

أكتب على شكل مجموع الجداء: $\sin 2x.\sin 3x.\sin 5x$

V- المعادلة $a\cos x+b\sin x+c=0$

1- تحويل $a\cos x+b\sin x$

ليكن التعبير $a\cos x+b\sin x$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$

نعلم أنه يوجد α من $]-\pi;\pi]$

حيث
$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

نضع $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ومنه $a\cos x+b\sin x=r(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)$

$$a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\alpha)$$

2- حل المعادلة $(E):\quad a\cos x+b\sin x+c=0$

حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$

لدينا $a\cos x+b\sin x+c=0$ ومنه $r\cos(x-\alpha)=-c$

حيث
$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$
و $r=\sqrt{a^2+b^2}$

و بالتالي $\cos(x-\alpha)=\dfrac{-c}{r}$

لدينا

$$-1\leq\frac{-c}{r}\leq 1\Leftrightarrow\left|\frac{c}{r}\right|\leq 1$$
$$\Leftrightarrow c^2\leq r^2$$
$$\Leftrightarrow c^2\leq a^2+b^2$$

و منه نستنتج أن:

*- إذا كان $c^2\leq a^2+b^2$ فان حلول المعادلة (E) هي: $x=x_0+\alpha+2k\pi$
أو $x=-x_0+\alpha+2k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$ و $\cos x_0=\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

*- إذا كان $c^2\succ a^2+b^2$ فان المعادلة (E) لا تقبل حلا.

مثال حل المعادلة $\cos x+\sqrt{3}\sin x=-1\quad x\in\mathbb{R}$

لدينا $r=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

ومنه $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\left[\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right]$

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right]$$

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

ومنه $\cos x+\sqrt{3}\sin x=-1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$

....

ملاحظة

لحل المعادلة $a\cos x+b\sin x+c=0$ في $\mathbb{R}$، يمكن أن نضع $\tan\frac{x}{2}=t$ بحيث $x\neq\pi+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي المعادلة السابقة تصبح

$$\begin{cases} a.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+b.\dfrac{2t}{1+t^2}+c=0 \\ \tan\dfrac{x}{2}=t \qquad t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

نحل المثال باستعمال الطريقة الثانية

المعادلة السابقة تصبح

$$\begin{cases} \dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\sqrt{3}\dfrac{2t}{1+t^2}=-1 \qquad (E) \\ t=\tan\dfrac{x}{2} \qquad x\neq\pi+2k\pi \end{cases}$$

$$(E)\Leftrightarrow 1-t^2+2\sqrt{3}t=-1-t^2$$

$$(E)\Leftrightarrow t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و بالتالي $\tan\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ و منه $\frac{x}{2}=\frac{-\pi}{6}+k\pi$

إذن $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $S=\left\{\frac{-\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3- حل المتراجحات المثلثة

حل المتراجحات التالية

$$x\in[-\pi;2\pi] \quad \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\succ-\sqrt{2}$$

$$x\in[-\pi;\pi] \quad \sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x\geq 0$$

$$x\in[0;2\pi[\quad \tan 2x\leq\tan x$$