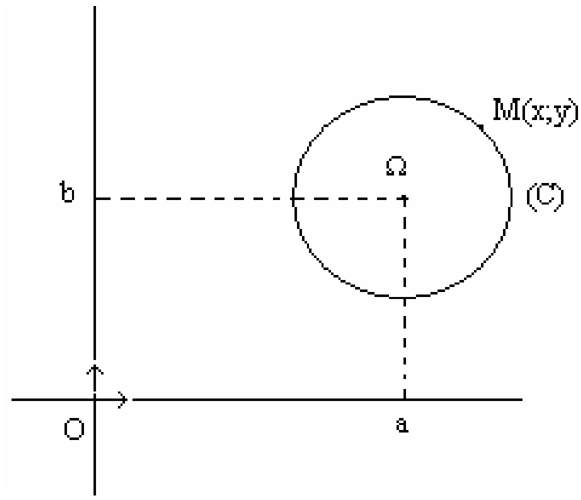
دراسة تحليلية لدائرة

I- معادلة دائرة

1- معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،
نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r $(r \geq 0)$

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$



مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r $(r \geq 0)$ هي $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

حالة خاصة

معادلة الدائرة (C) التي مركزها أصل المعلم و شعاعها r هي $x^2+y^2=r^2$

أمثلة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

1- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $\Omega(-2;3)$ و شعاعها 4

2- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $A(2;3)$ وتمر من النقطة $B(1;-3)$

ملاحظة

* بوضع $c = a^2+b^2-r^2$
معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r تكتب على شكل
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

* نعتبر $\{\Omega\}$ دائرة مركزها Ω و شعاعها منعدم

2- دراسة المعادلة $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

لتكن (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2-c$$

إذا كان $a^2+b^2-c \prec 0$ فان $(E)=\varnothing$

إذا كان $a^2+b^2-c=0$ فان $(E)=\{\Omega(a;b)\}$

إذا كان $a^2+b^2-c \succ 0$ فان $(E)=C(\Omega(a;b);r)$ حيث $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

مبرهنة

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. a و b و c أعداد حقيقية.
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ هي معادلة لدائرة إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2-c \geq 0$
مركز هذه الدائرة هو $\Omega(a;b)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

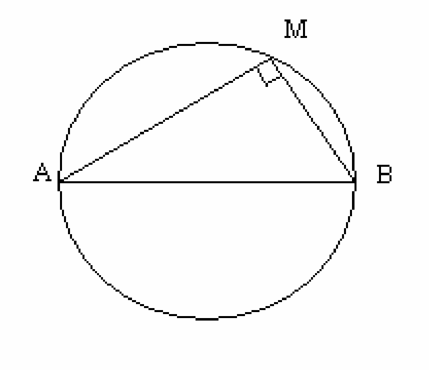
تمرين

حدد (E) مجوعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-2x+y+7=0$

حدد (E') مجوعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-6x+4y-7=0$

3- معادلة معرف بأحد أقطارها

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$



$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

مبرهنة

ليكن A و B نقطتين مختلفتين

مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ، معادلة الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي
$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر $A(-1;2)$ و $B(-5;4)$ و $C(-3;6)$

1- حدد الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

2- أ- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

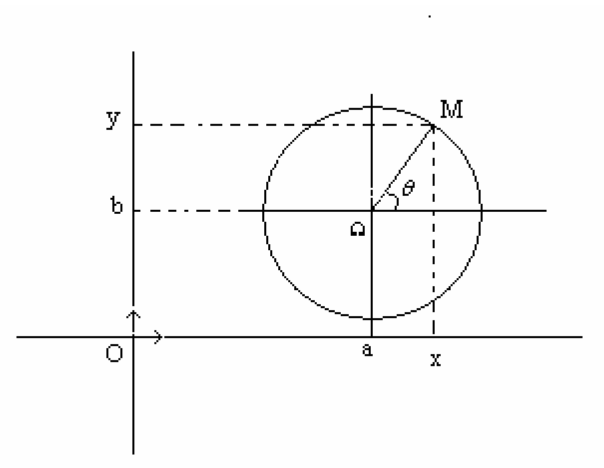
4- تمثيل بارامتري لدائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها غير منعدم r

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2+\left(\frac{y-b}{r}\right)^2=1$$

ومنه يوجد عدد حقيقي θ من $[0;2\pi[$ حيث

$$\begin{cases}\dfrac{x-a}{r}=\cos\theta\\[2mm] \dfrac{y-b}{r}=\sin\theta\end{cases}$$



$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \quad \exists\theta\in\mathbb{R}/\ \begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$$

مبرهنة و تعريف

مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r $(r\succ 0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي

تحقق $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$

النظمة $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتري لدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

حالة خاصة

التمثيل البارامتري للدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r هي $\theta \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

تمرين

حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

5- داخل و خارج دائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

نعتبر $c = a^2 + b^2 - r^2$

$\Omega M = r \Leftrightarrow M(x;y) \in (C)$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow$

M داخل $(C) \Leftrightarrow \Omega M \prec r$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \prec 0 \Leftrightarrow$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة معادلتها

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

- داخل الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \prec 0$
- خارج الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \succ 0$

تمرين

حل مبيانيا

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \prec 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1\right) \leq 0$$

II- تقاطع مستقيم ودائرة

1- مبرهنة

ليكن (D) مستقيم و (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r

* إذا كان $d(\Omega;(D)) \succ r$ فان $(D) \cap (C) = \varnothing$
* إذا كان $d(\Omega;(D)) = r$ فان $(D) \cap (C)$ أحادية
* إذا كان $d(\Omega;(D)) \prec r$ فان (D) و(C) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

تمرين

أدرس تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D) في الحالات التالية

1- $(C) = C(\Omega(1;-2);2)$ و $(D): x + 2y - 1 = 0$

2- $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و $(D): 3x + 4y - 6 = 0$

3- $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و $(D): 3x + 4y - 5 = 0$

2- المماس للدائرة

a- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω

(D) مماس للدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega;(D)) = r$

ملاحظة

لتكن A نقطة من المستوى

إذا كان A داخل دائرة (C) فانه لا يوجد أي مماس لها مار من A

إذا كان $A \in (C)$ فانه يوجد مماس وحيد لـ (C) مار من A

إذا كان A خارج دائرة (C) فانه يوجد مماسان لها ماران من A

b- المماس لدائرة عند أحد نقطها

أ- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و A نقطة منها

تقول إن المستقيم (D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A إذا وفقط إذا كان (D) عموديا على (ΩA) في A.

ب- خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

لتكن M نقطة من (D)

(D) مماس للدائرة (C) عند $A \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$

خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

(D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2 \quad \forall M \in (D)$

ج- معادلة المماس عند أحد نقطها

ليكن (D) مماس للدائرة (C) مركزها Ω و شعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$

لتكن $M(x;y)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow (x-a)(x-x_0)+(y-b)(y-y_0)=r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

حيث $c=a^2+b^2-r^2$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. إذا كانت (C) دائرة معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ فان معادلة المماس لها عند $A(x_0;y_0)$ هي

$$xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

ملاحظة

معادلة المماس لدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$ هي $xx_0+yy_0-r^2=0$

تمرين

نعتبر الدائرة $(C): x^2+y^2-x-2y=0$

تأكد أن $A(1;2) \in (C)$ حدد معادلة للمماس لـ (C) عند A

تمرين

في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم . نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها $x^2+y^2+2x-2y-2=0$

1- حدد مركز وشعاع (C)

2- حدد موضع $A(2;3)$ بالنسبة للدائرة (C)

3- حدد جميع المماسات للدائرة (C) المارة من A