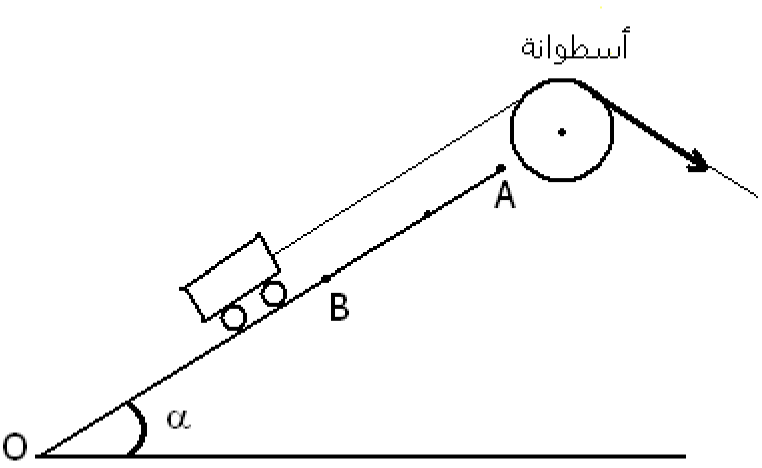
تصحيح تمارين حول حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تمرين 1



نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 9{,}8m/s^2$

يتم جر عربة بواسطة خيط غير قابل الامتداد وذي كتلة مهملة ملفوف حول أسطوانة كتلتها $m_C = 250g$ وشعاعها $r = 6cm$.

الأسطوانة تدور حول محورها الأفقي بواسطة محرك يطبق عليه مزدوجة ذات عزم $\mathcal{M}$ ثابت .

العربة توجد فوق مستوى مائل بالزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للخط الأفقي طوله $OA = 2m$. كتلة العربة هي $m_S = 400g$.

1 ـ أحسب شدة قوة الجر لمنح العربة تسارعا $a = 0{,}5m/s$

2 ـ أكتب المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة علما أن سرعته البدئية منعدمة عند أصل المعلم $\mathcal{R}$.

3 ـ على أي مسافة OB من النقطة O يجب حذف قوة الجر لكي تصير سرعة G منعدمة عند النقطة A ؟

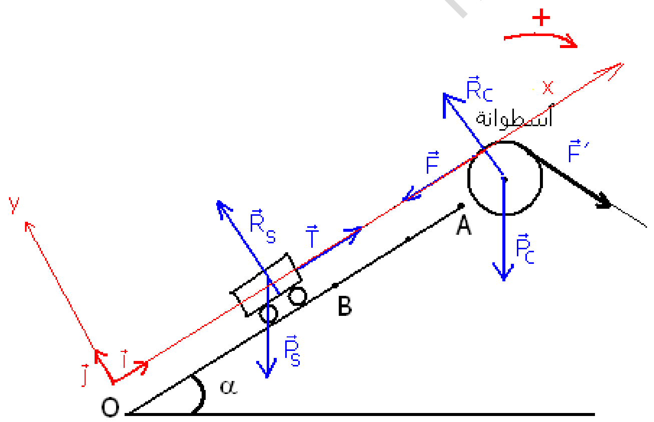
4 ـ أحسب J_Δ عزم قصور الأسطوانة ، واستنتج قيمة $\mathcal{M}$.

الجواب :

1 ـ حساب قوة الجر T :

نختار جسم مرجعي مرتبط بالأرض ومعلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{i})$ مواز للمستوى المائل وموجه في نفس منحى حركة العربة و $(O,\vec{j})$ عمودي على المستوى المائل وموجه نحو الأعلى .

أنظر الشكل



دراسة حركة العربة S :

القوى المطبقة على العربة (S) كمجموعة مدروسة : $\vec{P}_S, \vec{R}_S, \vec{T}$

حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا

$$\vec{P}_S + \vec{R}_S + \vec{T} = m_S\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور $(O,\vec{i})$ فنجد :

$$P_{Sx} + R_{Sx} + T_x = m_S.a \qquad (a_x = a)$$

$$-m_S g \sin\alpha + T = m_S.a$$

تمكن هذه العلاقة من حساب شدة توتر الخيط T بحيث أن

$$T = m_s a + m_S g \sin\alpha$$

$$T = m_S(a + g\sin\alpha)$$

تطبيق عددي : $T = 2{,}16N$

2 ـ المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة باعتبار أن السرعة البدئية منعدمة عند أصل المعلم :

بما ن التسارع ثابت إذن فحركة مركز قصور العربة مستقيمية متغيرة بانتظام معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي :

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ عند أصل المعلم (t=0) لدينا $x_0=0$ و $v_0=0$ وبالتالي فإن المعادلة الزمنية هي

$x=0,25t^2$

3 ـ المسافة OB التي يجب عندها حذف قوة الجر لكي يصل إلى النقطة A بسرعة منعدمة :

نقسم مسار العربة إلى مرحلتين :

المرحلة الأولى وهي OB حيث أن حركة العربة حركة مستقيمية متغيرة بانتظام : $x=0,25t^2$ و $v=0,5t$

عند النقطة B تكون سرعة العربة هي : $v_B=5t_B$ بحيث أن

$$t_B=\frac{v_B}{0,5}\Rightarrow x_B=OB=0,25\times\left(\frac{v_B}{0,5}\right)^2$$

$$v_B^2=\frac{(0,5)^2}{0,25}\times OB\Rightarrow v_B^2=OB$$

المرحلة الثانية هي عندما تقطع العربة المسافة BA ، نطبق مبرهنة الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}m_Sv_A^2-\frac{1}{2}m_Sv_B^2=\underset{B\to A}{W}\left(\vec{P}_S\right)+\underset{B\to A}{W}\left(\vec{R}_S\right)$$

لدينا حسب المعطيان أن العربة ستتوقف في النقطة A أي أن $v_A=0$ وأن $\vec{R}_S$ عمودية على متجهة الانتقال أي أن شغلها منعدم . وبالتالي :

$$-\frac{1}{2}m_Sv_B^2=\underset{B\to A}{W}\left(\vec{P}_S\right)\Rightarrow v_B^2=2gBA\sin\alpha$$

$$OB=2g\left(-OB+OA\right)\sin\alpha$$

$$OB\left(1+2g\sin\alpha\right)=2gOA\sin\alpha\Rightarrow OB=\frac{2gOA\sin\alpha}{\left(1+2g\sin\alpha\right)}=1,82m$$

4 ـ عزم قصور الأسطوانة هو :

$$J_\Delta=\frac{1}{2}m_Cr^2=4,5.10^{-4}kg.m^2$$

لنستنتج قيمة $\mathcal{M}$:

دراسة حركة اللأسطوانة C :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الأسطوانة :

القوى المطبقة على الأسطوانة هي :

$\vec{T}'$ ، $\vec{P}_C,\vec{R}_C,\mathcal{M}\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$

$\mathcal{M}_\Delta=J_\Delta.\ddot{\theta}$ بحيث أن $a=r\ddot{\theta}$ لكون أن الخيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة . أي أن $\frac{a}{r}=\ddot{\theta}$ وبالتالي فإن

$$\mathcal{M}_\Delta=J_\Delta.\frac{a}{r}+T'.r=0,13N.m$$

تمرين 2

نعتبر قرصا في دوران حول محور ثابت Δ ورأسي . عزم قصور القرص $J_\Delta=6.10^{-2}kg.m^2$

1 ـ يمثل المنحنى جانبه مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد r=0,1m من المحور Δ .

1 ـ 1 ما هي طبيعة حركة M ؟ علل الجواب

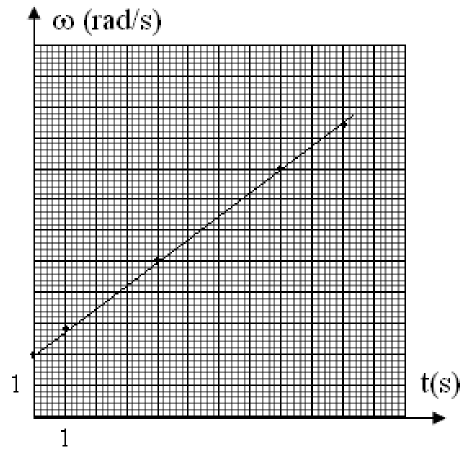
1 ـ 2 حدد قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ واكتب معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}=f(t)$

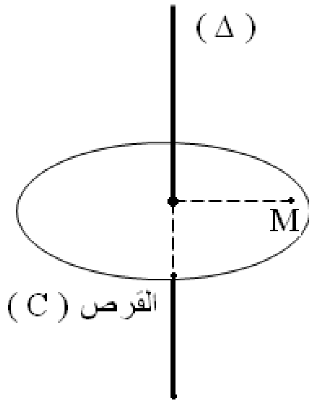
2 ـ علما أن الأفصول الزاوي منعدم عند أصل التواريخ .

2 ـ 1 اكتب المعادلة الزمنية للحركة $\theta=f(t)$

2 ـ 2 احسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريخين $t_1=4,0s$ و $t_2=5,2s$

2 ـ 3 نعتبر اللحظة ذات التاريخ t=2s . احسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي a_t والتسارع ألمنظمي a_n للنقطة M واستنتج منظم التسارع $\ddot{\theta}$.
3 ـ احسب مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ .





الأجوبة :
1 ـ 1 طبيعة حركة M : من خلال الشكل يلاحظ أن السرعة الزاوية دالة خطية بالنسبة للزمن إذن فحركة النقطة M حركة دائرية متغيرة بانتظام
1 ـ2 قيمة التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0{,}75 rad / s^2$$

$$\omega(t) = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0$$

$$\omega(t) = 0{,}75t + 2 \quad (rad/s)$$

2 ـ 1 المعادلة الزمنية للحركة M $\theta(t) = 0{,}375t^2 + 2t \quad (rad)$

2 ـ2 عدد الدورات القرص بين اللحظتين t_1 وt_2

$n = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4\pi(t_2 - t_1)}$ أي أن $n = 1$

2 ـ 3 قيمتي التسارع المماس والتسارع ألمنظمي

$$a_t = r\ddot{\theta} \Rightarrow a_t = 75.10^{-3} rad / s^2$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2 \Rightarrow a_n = 1{,}225 rad / s^2$$

منظم متجهة التسارع هو

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$a = 1{,}227 rad / s^2$$

3 ـ مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ

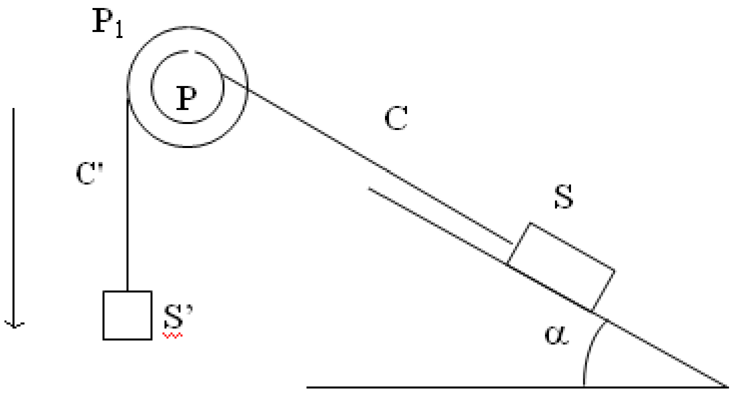
$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$= 45.10^{-3} N.m$$

تمرين3

ينزلق جسم (S) كتلته m = 70 kg على طول خط أكبر ميل لمستوى مائل بزاوية α = 30° بالنسبة للمستوى الأفقي . نجر الجسم بواسطة حبل (C) . خلال حركة جسم (S) على المستوى المائل يطبق هذا

الأخير قوى الاحتكاكات تكافئ قوة $\vec{f}$ موازية للمستوى ومنحاها عكس منحى الحركة وشدتها $\frac{1}{10}$ وزن الجسم $(\|\vec{f}\|=\frac{1}{10}\|\vec{P}\|)$



1- خلال المرحلة الأولى, يطبق الحبل على الجسم قوة ثابتة $\vec{F}$ موازية للمستوى المائل , بحيث ينطلق الجسم بدون سرعة بدئية من النقطة A ليصل إلى النقطة B التي تبعد عنها بمسافة 5m بسرعة $v_B=5m/s$.

خلال المرحلة الثانية وعند النقطة B ، تأخذ القوة $\vec{F}$ قيمة جديدة بحيث تصبح حركة (S) منتظمة على طول المسافة BD حيث BD=25m .

- أحسب خلال كل مرحلة شدة القوة $\vec{F}$.

2- بعد أن قطع الجسم 30 m , ينقطع الحبل . ما هي طبيعة حركة الجسم ؟ أستنتج المدة الزمنية التي استغرقها منذ انطلاقه من النقطة A إلى حين رجوعه منها .

3- للقيام بهذه التجارب نستعمل الجهاز التالي :

الحبل ملفوف على أسطوانة P . شعاعها R = 25cm أسطوانة ثانية P_1 مثبتة على ألأسطوانة الأولىP وشعاعها R_1= 50cm ، لهما نفس المحور(Δ) .

نلف حبل آخر C′ حيث تبث في طرفه الحر جسما (S′) له حركة رأسية ويقوم بجر المجموعة نحو الأسفل .

عزم قصور المجموعة (P_1 ,P) $J_\Delta=1.375kg.m^2$

باعتمادك على المرحلتين اللتين تمت الإشارة إليهما في السؤال (1) . أحسب خلال كل مرحلة :

أ- المسافة المقطوعة من طرف S′ .

ب- توتر الحبل C′ .

ج- قيمة الكتلة m_1

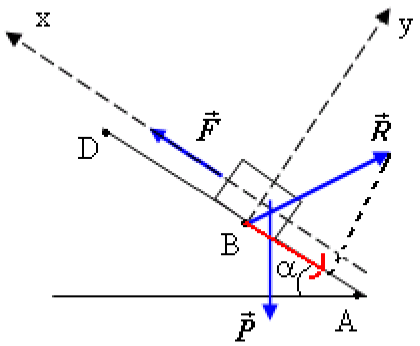
وأكتب المعادلة الزمنية لحركة (S′) خلال كل مرحلة .

4- أوجد السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للأسطوانة عند انقطاع الحبل C و كذلك أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S′ عند اللحظة التي يمر فيها الجسم S من النقطة A .

الجواب :

1 ـ في المرحلة الأولى :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية في المرحلة الأولى :



$$\frac{1}{2}mv_B^2=F.\ell-\frac{mg}{10}\ell-mg\ell\sin\alpha$$

$$F=\frac{mv_B^2}{2\ell}+\frac{mg}{10}+mg\sin\alpha$$

$$F=595N$$

المرحلة الثانية a=0 حسب مبدأ القصور ؛

$$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{0}\Rightarrow\vec{F}+\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}$$

نسقط العلاقة على $(O,\vec{i})$

$\boldsymbol{F=mg\sin\alpha+\frac{mg}{10}}$ تطبيق عددي $\boldsymbol{F=420N}$

2 ـ عند انقطاع الحبل :

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}'$

الاسقاط على $(O,\vec{i})$ $a'=-g(\sin\alpha+\frac{1}{10})\Rightarrow a'=-6m/s^2$

طبيعة الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام

المدة الزمنية المستغرقة مند انطلاق الجسم من النقطة A إلى حين الرجوع إليها .

$t=t_1+t_2+t_3+t_4$

المدة المستغرقة لقطع المسافة AB t_1 $\Delta V=a.\Delta t\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta V}{a}=t_1$

إذن $t_1=2s$

المدة الزمنية المستغرقة خلال المرحلة التي انقطع فيها الحبل : $\Delta x=V_B t_2\Rightarrow t_2=\frac{BD}{V_B}=5s$

t_3 المدة الزمنية التي سيستغرقها الجسم بعد انقطاع الحبل إلى أن يتوقف ثم ينزلق على المستوى المائل .

بما أن الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام وهي متباطئة ،

$\Delta v=a'\Delta t\Rightarrow \Delta t=-\frac{v_B}{a'}=0,83s$

والمسافة التي يقطعها الجسم هي : $DE=\frac{1}{2}a't^2+v_Bt=2,08m$

المدة الزمنية المستغرقة خلال مرحلة الرجوع

حساب التسارع :

$mg\sin\alpha-\frac{mg}{10}=ma''\Rightarrow a''=g(\sin\alpha-0,1)=3,92m/s^2$

نعتبر أن أصل المعلم هو E وأصل التواريخ كذلك : $EA=\frac{1}{2}a''t^2\Rightarrow t_4=\sqrt{\frac{2EA}{a''}}=4,04s$

إذن $t=11,87s$

3 ـ الدراسة التحريسة

حساب المسافة المقطوعة خلال المرحلتين السابقتين :

العلاقة بين x وz بحيث أن x موضع الجسم في لحظة t وz موضع الجسم S′ في نفس اللحظة t

نعتبر أنه في نفس اللحظة t أن الأفصول الزاوي للأسطوانة هو θ . نعتبر أن الحبل غير قابل الانزلاق على

الأسطوانة $x=R\theta$ و $z=R_1\theta$ أي أن $\frac{x}{R}=\frac{z}{R_1}$ وبما أن $R_1=2R$ نستنتج من هذه العلاقة $z=2x$

* في المرحلة الأولى x=AB وبما أن AB=5m فإن z=10m
* في المرحلة الثانية x=BD وBD=25m فإن z=50m

حساب التوتر T_1

نطبق القانون الثاني لنيوتن على S لحساب التسارع في المرحلة الأولى نستعمل معطيات السؤال (1) :

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$:

$F-mg\sin\alpha-f=ma\Rightarrow a=\frac{F-mg\sin\alpha-f}{m}$

$a=2,5m/s^2$

دراسة المجموعة في الحالة الجديدية :

نطبق القانون الثاني لنيوتن في الحالة الجديدة على الجسم (S):

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\vec{a}$$

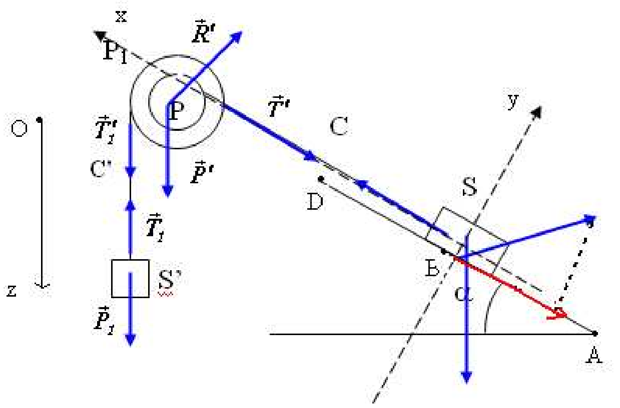
إسقاط العلاقة على $(O,\vec{i})$ $\quad T=mg\sin\alpha+\dfrac{mg}{10}+ma \quad (1)$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة $\quad T_1R_1-TR=J_\Delta\ddot{\theta} \quad (2)$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على S' $\quad T_1=m_1(g-a_1) \quad (3)$

من العلاقة (1) والعلاقة (2) نستنتج

$$T_1=\frac{J_\Delta a}{R.R_1}+T\frac{R}{R_1} \quad et \quad T=F\Rightarrow T_1=\frac{J_\Delta a}{R.R_1}+F\frac{R}{R_1}$$



في المرحلة الأولى : $T_1=325N$

في المرحلة الثانية $a=0$ $\quad T_1=210N$

<u>حساب الكتلة في المرحلتين</u> : نطبق العلاقة (3)

$$T_1=m_1(g-a_1)$$

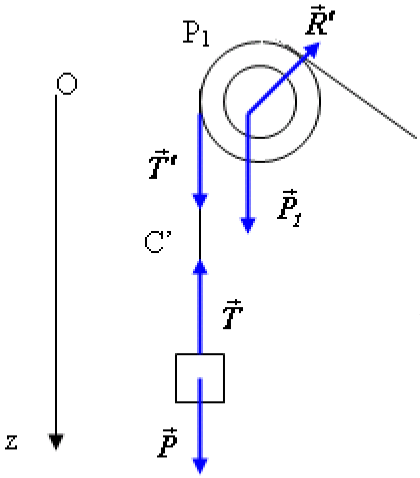
$$z=2x\Leftrightarrow\ddot{z}=2\ddot{x}$$

$$a_1=2a$$

$T_1=m_1(g-2a)$ أي أن $m_1=\dfrac{T_1}{g-2a}$

في المرحلة الأولى : $m_1=65g$

في المرحلة الثانية $m_1=21g$ (m_1 الكتلة التي يجب أن يأخذها الجسم S' للحصول على حركة بالمواصفات المذكورة في المرحلة 2)



<u>المعادلات الزمنية :</u>

* المرحلة الأولى $z=2,5t^2$

* المرحلة الثانية $z=10t+10$

<u>4 ـ عندما ينقطع الحبل .</u>

<u>السرعة الزاوية للأسطوانة</u> : $\quad x=R\theta\Leftrightarrow\dot{x}=R\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}=\frac{V_D}{R}$$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}=20rad/s$

<u>لحساب السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S' :</u>

<u>ـ نحسب المدة الزمنية المستغرقة من طرف S لمروره من A</u>

<u>عندما ينقطع الحبل :</u> $t=4,87s$ أنظر السؤال 2

<u>ـ الدراسة الدينامكية للمجموعة { أسطوانة +جسم S' } عند انقطاع الحبل</u>

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S' $\quad \vec{P}+\vec{T}=m_1\vec{a}$

الاسقاط على Oz $\quad P-T=m_1a_2$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $\quad T'.R_1=J_\Delta\ddot{\theta}'$

نستنتج $T=T'$

$$(m_1g-m_1R_1\ddot{\theta}')R_1=J_\Delta\ddot{\theta}'$$

$$\ddot{\theta}'=\frac{m_1gR_1}{m_1R_1+J_\Delta}\Rightarrow\ddot{\theta}'=15,85rad/s^2$$

حركة البكرة حركة دورانية متغيرة بانتظام عند اللحظة $t=3,9s$ السرعة الزاوية للأسطوانة هي

$$\dot{\theta}=15.85t+20\Rightarrow\dot{\theta}=97,2rad/s$$

وسرعة الجسم S′ هي $V = R_1\dot{\theta} \Rightarrow V = 48,6m/s$

تمرين4

نعتبر جسما صلبا (S_1) كتلته $m_1 = 1kg$ قابل للانزلاق على سكة أفقية . (S_1) مرتبط بجسم (S_2) كتلته m_2 بواسطة خيط غير مدود ، كتلته مهملة ، يمر في مجرى بكرة (B) متجانسة شعاعها $r = 4cm$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ثابت يمر من مركزها . خلال الحركة لا ينزلق الخيط على البكرة (B) .

عزم قصور (B) بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

نحرر المجموعة المتكونة من (S_1) و (S_2) و (B) بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ $t_0 = 0$.

يمثل المنحنى الممثل في الشكل (2) تغيرات السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$ للبكرة .

1 ــ أوجد مبيانيا معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$.

2 ــ حدد معللا جوابك ، طبيعة حركة (B) .

3 ــ أوجد تعبير n عدد الدورات المنجزة من طرف (B) عند اللحظة t بدلالة الزمن t و $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي لحركة (B) . أحسب n عند اللحظة $t = 1,25s$.

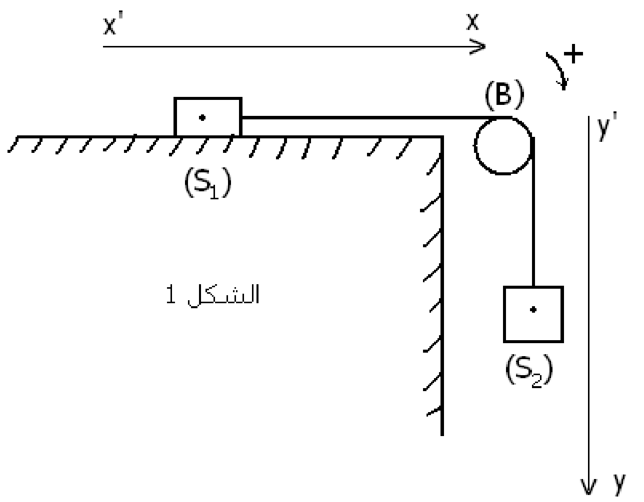
4 ــ حدد ، معللا جوابك ، طبيعة حركة كل من (S_1) و (S_2) ، ثم أحسب قيمة تسارعهما a .

5 ــ يتم التماس بين (S_1) والسكة باحتكاك حيث φ زاوية الاحتكاك . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على كل من (S_1) و (S_2) و العلاقة الأساسية للتحريك على (B) ، بين أن تعبير التسارع a يكتب على الشكل التالي

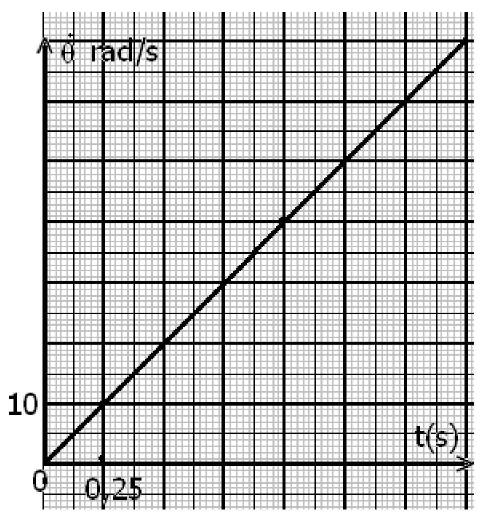
$$a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

حيث g تسارع الثقالة و $k = \tan\varphi$ معامل الاحتكاك .

6 ــ بين أن حركة (S_1) لا تتم إلا إذا كانت m_2 كتلة (S_2) أكبر من قيمة يجب تحديدها . نعطى $k = \tan\varphi = 0,16$



الشكل 1



الشكل 2

الجواب :

1 ـ إيجاد مبيانيا السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$:

من خلال المبيان يتبين أن $\dot{\theta}(t)$ هي دالة خطية تمر من أصل المعلم معاملها الموجه هو :

$a = \frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} = 40rad/s^2$ وبالتالي فالمعادلة تكتب على الشكل التالي : $\dot{\theta}(t) = 40t$

2 ـ طبيعة حركة (B) :

السرعة الزاوية عبارة عن دالة خطية على شكل $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t$ أي أن $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 40rad/s^2 = cte$ وبالتالي فحركة البكرة : حركة دورانية متغيرة بانتظام تسارعها الزاوي $\ddot{\theta} = 40rad/s^2$.

3 ـ تعبير n عدد الدورات البكرة عند اللحظة t :

بما أن الحركة دورانية متغيرة بانتظام فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 \Rightarrow \theta(t) = 20t^2$$

ونعلم أن عدد الدورات خلال اللحظة t هو : $\theta(t) = 2\pi n \Rightarrow n = \frac{\theta(t)}{2\pi}$

أي أن : $n = \frac{20t^2}{2\pi} = \frac{10t^2}{\pi}$

عند $t = 1,25s$ يكون عدد الدورات هو : $n = 4,97 \simeq 5$

4 ـ طبيعة كل من S_1 و S_2 :

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة وغير مدود فإن المسافة x_1 التي ينتقل بها الجسم S_1 على $(O,\vec{i})$ هي نفس المسافة y_1 التي سينتقل بها الجسم S_2 على المحور $(O,\vec{j})$ ونفس طول القوس s_B الذي ستنتقل به نقطة على مجرى البكرة أي أن $x_1 = y_1 = s_B$ ولدينا $s_B = r\theta$ أي أن

$$x_1 = y_1 = r\theta \Rightarrow v_1 = v_2 = r\dot{\theta} \Rightarrow a_1 = a_2 = r\ddot{\theta}$$

نستنتج أن S_1 و S_2 لهما نفس التسارع وهو ثابت ، وبما أن مسار كل منهما مستقيمي فإن حركة كل منهما هي حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

حساب قيمة تسارعهما $a = r\ddot{\theta} = 1,6m/s^2$

5 ـ لنثبت العلاقة التالية : $a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على كل من S_1 و S_2 :

على S_1 : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m.\vec{a}$

نسقط العلاقة على $(O,\vec{j})$:

$$m_2g - T_2 = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2g - m_2a$$

على S_1 : $\vec{P}_2 + \vec{R} + \vec{T}_2 = m_1.\vec{a}$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$:

$$-f + T_2 = m_2a$$

على $(O,\vec{j})$: $R_N - m_1g = 0 \Rightarrow R_N = m_1g$

نعلم أن $k=\tan\varphi=\dfrac{f}{R_N}\Rightarrow f=m_1gk$

في العلاقة الأولى : $T_2=km_1g+m_1a$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على B

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_1\right)+\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_2\right)=J_\Delta\ddot{\theta}\Rightarrow -T_1.r+T_2r=J_\Delta.\frac{a}{r}$$

$$T_2-T_1=\frac{J_\Delta}{r^2}$$

نعوض T_1 و T_2 بتعبيريهما المحصل عليه سابقا :

$$a\left(m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}\right)=m_2g-km_1g\Rightarrow a=\frac{g\left(m_2-km_1\right)}{m_1+m_2+\dfrac{J_\Delta}{r^2}}$$

لكي تتم حركة S_1 يجب أن يكون التسارع $a>0$ أي أن

$$a=\frac{g\left(m_2-km_1\right)}{m_1+m_2+\dfrac{J_\Delta}{r^2}}>0\Rightarrow m_2-km_1>0$$

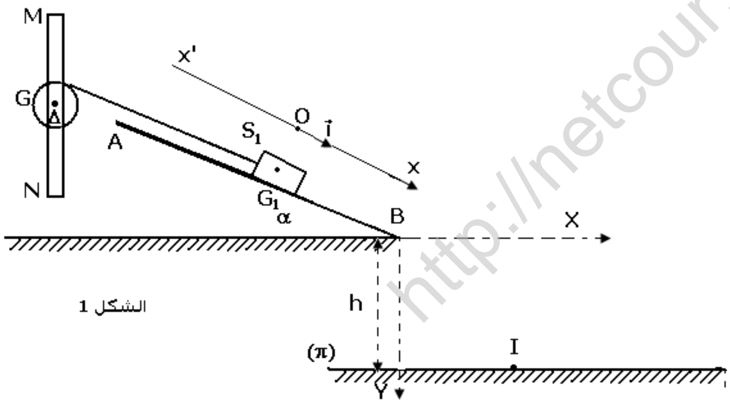
$$m_2>km_1\Rightarrow m_2>0.16kg$$

تمرين5

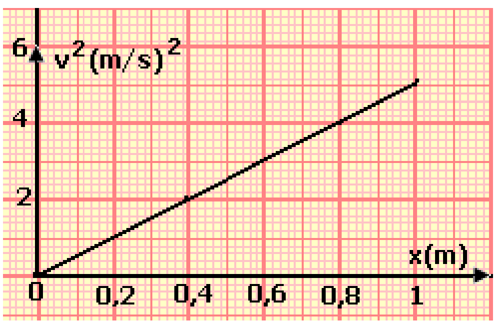
نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل (1) والمتكونة من :

ـ بكرة متجانسة شعاعها r=5cm ملتحمة بساق طولها MN=2L=40cm يتطابق مركز قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة {الساق ، البكرة } قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي Δ ثابت يمر من المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور Δ هو J_Δ .



ـ خيط f غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة وثبت أحد طرفيه بجسم صلب S_1 كتلته m=0,8kg ومركز قصوره G_1 . الجسم S_1 قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .



نعتبر أن الخيط f لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة .

نحرر المجموعة (S) بدون سرعة بدئية عند لحظة t=0 حيث يكون G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O,\vec{i})$. نمعلم عند كل لحظة موضع G_1 بالأفصول x .

1 ـ أوجد اعتمادا على الدراسة التحريكية ، تعبير التسارع a لحركة الجسم S_1 بدلالة m ، r ، J_Δ ، α و g .

2 ـ يمثل منحنى الشكل (2) تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x $(v^2=f(x))$.

2 ـ 1 حدد قيمة a واستنتج قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للمجموعة {الساق ، البكرة } .

2 ـ 2 ينفصل الجسم S_1 عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأفصول $x_B=0,8m$ فيسقط عند I على المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة h=1m من النقطة B .

2 ـ 2 ـ 1 أوجد إحداثيي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{BY})$.

2 ـ 2 ـ 2 أحسب السرعة الخطية للطرف M للساق بعد انفصال الجسم S_1 عن الخيط .

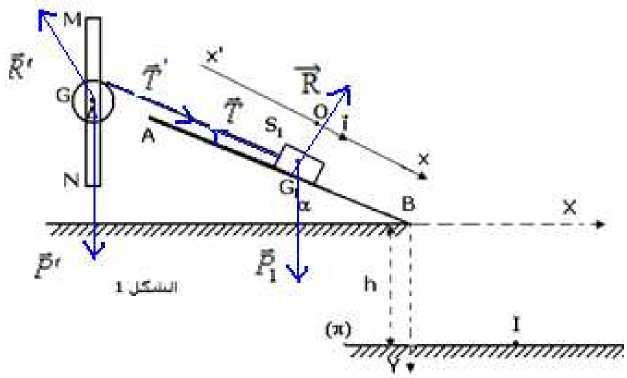
الجواب :

الدراسة التحريكية للجسم (S_1) :

المجموعة المدروسة : الجسم (S_1)

المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن الجسم $\vec{P}_1$ ، تأثير السطح $\vec{R}$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}$.



تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1.\vec{a}$ و منه :

$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T} = m_1.\vec{a}$.

إسقاط العلاقة المتجهية على المحور $(O;\vec{i})$ نحصل

على : $m_1.g.\sin\alpha - T = m_1.a$ و بالتالي :

$(1)\quad T = m_1 g \sin\alpha - m_1 a$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

المجموعة المدروسة : البكرة

المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن البكرة $\vec{P}'$ ، تأثير محور الدوران $\vec{R}'$ ،

تأثير الخيط (f) $\vec{T}'$.

$\sum M_\Delta(\vec{F}_{app}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ و منه : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}') + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}') + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}') = J_\Delta.\ddot{\theta}$ مع $M_\Delta(\vec{P}') = M_\Delta(\vec{R}') = 0$

و بالتالي نحصل على المعادلة التالية : $T'.r = J_\Delta.\ddot{\theta}$ (2)

بما أن الخيط غير مدود و كتلته مهملة فان : $T' = T$ و من جهة أخرى لا ينزلق على مجرى البكرة فان :

$\theta = \dfrac{x}{r}$ و منه : $\ddot{\theta} = \dfrac{a}{r}$. من المعادلتين (1) و (2) نستنتج تعبير تسارع الجسم حيث : $a = g.\dfrac{m.\sin\alpha}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}}$

2 – 1 – من خلال المبيان يتبين أن $V^2 = f(x)$ دالة خطية معادلتها : $v^2 = b.x$ مع a يمثل المعامل الموجه

للمنحنى ، نحصل باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للزمن على : $2.v.\dfrac{dv}{dt} = b.v$ و منه :

$a = \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\Delta(v^2)}{\Delta(x)} = 2.5 m.s^{-2}$.

حساب التسارع الزاوي للمجموعة : $\ddot{\theta} = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2.5}{5.10^{-2}} = 50 rad.s^{-2}$.

2 – 2 – 1 – إحداثيي النقطة I :

حساب السرعة v_B

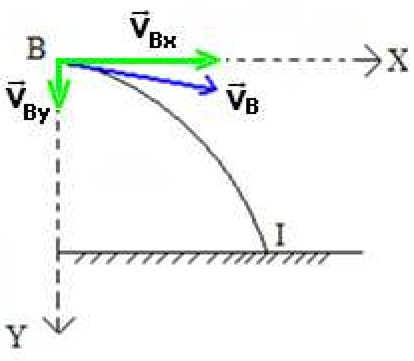
باستعمال المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$ و $v(t)$ عند انتقال الجسم من A إلى B ، وإقصاء الزمن بينهما :

$$x_B - x_A = \frac{1}{2}at^2$$

$$v_B - v_A = at$$

$$V_B = \sqrt{2.a.x_B} = 2 m.s^{-1}$$

المعادلتين الزمنيتين :



$$\begin{cases} x = V_B.\cos(\alpha).t \\ y = \frac{1}{2}.g.t^2 + V_B.\sin(\alpha).t \end{cases}$$ بعد إقصاء الزمن $t = \frac{x}{V_B.\cos(\alpha)}$

نحصل على معادلة المسار

$y = \frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x^2 + \tan(\alpha).x$ و منه : $y_I = h = \frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2 + \tan(\alpha).x_I$ و بالتالي نحصل على

معادلة من الدرجة الثانية : $\frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2 + \tan(\alpha).x_I - h = 0$ التي يمكن كتباتها على الشكل التالي :

$1.66.x_I + 0.577.x_I - 1 = 0$ و أحد حلولها $x_I = 0.62m$

إحداثيتي النقطة I $\left.\begin{matrix} x_I = 0.62m \\ y_I = 1m \end{matrix}\right\}$

2 – 2 – 2 – السرعة الخطية للطرف M بعد انفصال الجسم :

$\dot{\theta}_B = \dot{\theta}_M$ و التعويض نجد : $\frac{V_B}{r} = \frac{V_M}{L}$

و بالتالي : $\boxed{V_M = V_B \frac{L}{r} = 8m.s^{-1}}$.