

(c) تكون \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} مستوائية إذا وفقط إذا كانت إحداها تكتب بدلالة الأخرى مثلاً: $\bar{w} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$.

(d) إذا كانت \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} غير مستوائية و $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} + \gamma\bar{w} = \bar{0}$ فإن $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(II) المعلم في الفضاء

(1) نسمى معلماً في الفضاء كل رباعي $(\bar{O}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ حيث \bar{O} نقطة من الفضاء و \bar{i} و \bar{j} و \bar{k} 3 متجهات غير مستوائية يعني أساس.

(2) ليكن $R(\bar{O}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ معلماً في الفضاء.
(a) لكل نقطة M من الفضاء المتجهة \overrightarrow{OM} تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ المثلوث (x, y, z) يسمى مثلوث إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم R ونكتب $M(x, y, z)$ أو

$$M(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

ملاحظة

(b) نعتبر النقتين (\bar{A}, \bar{B}) و (x, y, z)

$$\overrightarrow{AB}(x' - x, y' - y, z' - z)$$

(*) لدينا إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن

$$I\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$$

(III) المستقيم في الفضاء

1) تعريف

لتكن A نقطة و \bar{u} متجهة. المستقيم المار من A والموجه بـ \bar{u} هو المجموعة التي نرمز لها بـ $D(A, \bar{u})$ والمعرفة بـ

$$(D) \quad D(A, \bar{u}) = \left\{ M \in E / \overrightarrow{AM} = \alpha\bar{u} \right\}$$

ملاحظة $M \in D(A, \bar{u})$ و \overrightarrow{AM} مستقيمي بين \Rightarrow

2) تمثيل باراميترى لمستقيم

تمثيل باراميترى للمستقيم (D) المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه

$$(D): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{بالمتجهة } \bar{u}(a, b, c) \text{ هو:}$$

3) معادلتان ديكارتيتان لمستقيم.

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بـ $\bar{u}(a, b, c)$ إذا كانت الأعداد a و b و c غير منعدمة فإن معادلتها (D) هما:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(*) إذا كان عدد واحد منعدم وعددان غير منعدمين. مثلاً $a = 0$ ، $b \neq 0$ و

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{فإن معادلتنا } (D) \text{ هما: } c \neq 0$$

(I) الأساس في الفضاء التجهي V_3

(1) لتكن \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} 3 متجهات من V_3 و C و B و A .
 $\overrightarrow{AD} = \bar{w}$ و $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$ و $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$

نقول إن المتجهات \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و B و C و D مستوائية.

نقول إن المتجهات \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و B و C و D غير مستوائية.

(2) لتكن \bar{i} و \bar{j} و \bar{k} 3 متجهات غير مستوائية من V_3 .

(*) كل متجهة من V_3 تكتب بطريقة وحيدة على شكل

$$\bar{u} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

(*) نقول إن المثلوث $B = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

(*) إذا كانت $\bar{u} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ فإن المثلوث (x, y, z) يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة \bar{u} بالنسبة للأساس B ونكتب

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \bar{u} = (x, y, z)$$

(3) ل يكن $B = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

(a) نعتبر المتجهتين $\bar{v} : (x', y', z')$ و $\bar{u} : (x, y, z)$ لدينا $\alpha\bar{u} : (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ و $\bar{u} + \bar{v} : (x + x', y + y', z + z')$.

(b) نعتبر المتجهتين $\bar{v} : (x', y', z')$ و $\bar{u} : (x, y, z)$.

من أجل دراسة استقامة المتجهتين \bar{u} و \bar{v} نقوم بحساب المحددات الثلاثة المستخرجة من جدول إحداثيات \bar{u} و \bar{v} وهي:

$$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

(*) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن \bar{u} و \bar{v} مستقيمي بين.

(*) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن \bar{u} و \bar{v} غير مستقيمي بين.

(c) نعتبر المتجهات $\bar{v} : (x', y', z')$ و $\bar{u} : (x, y, z)$ و $\bar{w} : (x'', y'', z'')$.

(*) نسمي محدد المتجهات \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} العدد الذي نرمز له بالرمز $\det(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ والمعروف بما يلي:

$$\det(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(*) تكون \bar{u} و \bar{v} و \bar{w} مستوائية إذا وفقط إذا كان $\det(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0$.

ملاحظة

(a) تكون $\bar{u} = \alpha\bar{v}$ و $\bar{v} = \alpha\bar{u}$ مستقيمي بين إذا وفقط إذا كان $\alpha = \beta = 0$.

(b) إذا كانت $\bar{u} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{w}$ غير مستقيمي بين و $\bar{v} = \bar{0}$ فإن $\alpha = \beta = 0$.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax + By + Cz + D = 0$ حيث $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

4. تقاطع مستويين.

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستويين يستحسن استعمال معادلتين ديكارتنيتين $(P): ax + by + cz + d = 0$ و $(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ نعتبر المستويين :

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Q) نقوم بحساب المحددات

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

(a) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة معدومة فإن $(P) \parallel (Q)$.

(b) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير معدومة فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D) الذي معادلاته الديكارتنيتان هما :

$$(D): \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

5. تقاطع مستوى ومستقيم.

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستوى ومستقيم يستحسن استعمال معادلة ديكارتية بالنسبة للمستوى وتمثيل باراميتري بالمستقيم.

نعتبر المستوى $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ و المستقيم

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Δ) نقوم بحل النظمة :

$$\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 & (4) \end{cases}$$

ولهذا نعرض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة (I) بمجهول واحد t .

(a) إذا كان لهذه المعادلة حل $t = t_0$ فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة

(نحصل على إحداثياتها بتعويض t في (1) و (2) و (3)).

(b) إذا كان لهذه المعادلة مالانهاية له من الحلول ($0 = 0$) فإن $(P) \subset (\Delta)$.

(c) إذا كانت هذه المعادلة لاقبلاً حل "0" فإن (Δ) و (P) متوازيان قطعاً.

ملاحظة

$D(A, \vec{u}) // D'(B, \vec{v})$ (*)
 $D(A, \vec{u}) // P(B, \vec{v}, \vec{w})$ (*)
 $P(A, \vec{u}, \vec{v}) // P'(B, \vec{x}, \vec{y})$ (*)
 و \vec{v} و \vec{x} و \vec{y} مستوائية.

(*) إذا كان عددين منعدمين وعدد واحد غير منعدمين مثلًا $b = 0$ ، $a = 0$

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \text{ فإن معادلنا } (D) \text{ هما :}$$

4. الأوضاع النسبية لمستقيمين.

ملاحظة من أجل دراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين يستحسن استعمال تمثيلين باراميتريين.

نعتبر المستقيمين

$$(\Delta'): \begin{cases} x = x_1 + a't' \\ y = y_1 + b't' \\ z = z_1 + c't' \end{cases} \quad (\Delta): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

لدينا (Δ) مار من $A(x_0, y_0, z_0)$ ووجه بـ $\vec{u}(a, b, c)$

و (Δ') مار من $B(x_1, y_1, z_1)$ ووجه بـ $\vec{v}(a', b', c')$ من أجل دراسة تقاطع (Δ) و (Δ') نقو بدراسة استقامية \vec{u} و \vec{v}

(a) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متسقين فإن $(\Delta) \parallel (\Delta')$. ولمعرفة هل (Δ) و

(Δ') متبقيان أم متوازيان قطعاً. تتحقق هل $(\Delta') \subset (\Delta)$ ؟

(*) إذا كان (Δ) فان $A \in (\Delta)$.

(*) إذا كان (Δ) فان $(\Delta) \subset (\Delta')$ متوازيان قطعاً.

(b) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير متسقين فإن (Δ) و (Δ') متقطعان أو غير مستوائيين ، ولمعرفة أي حالة لدينا نقوم بحل النظمة :

$$(S) \begin{cases} x_0 + at = x_1 + a't' \\ y_0 + bt = y_1 + b't' \\ z_0 + ct = z_1 + c't' \end{cases}$$

في الثالثة.

(i) إذا كان للنظمة (S) حل فإن (Δ) و (Δ') متقطعان وللحصول على

إحداثيات نقطة التقاطع نوع t في تمثيل (Δ) أو t' في تمثيل (Δ') .

(ii) إذا كانت النظمة (S) لا تقبل حل فإن (Δ) و (Δ') غير مستوائيين.

IV. المستوى في الفضاء

1. تعريف

لتكن A نقطة و \vec{u} و \vec{v} متجهين . المستوى المار من A والموجه بـ

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in E / \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}\}$$



ملاحظة $M \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ و \vec{u} و \vec{v} مستوائية $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

2. تمثيل باراميتري لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من (x_0, y_0, z_0) و الموجه بالمتجهين

$\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$ تمثيل باراميتري لمستوى (P) هو :

$$(P): \begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases} \quad (t, t' \in IR)$$

3. معادلة ديكارتية لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من (x_0, y_0, z_0) و الموجه بالمتجهين

$$\vec{v}(a', b', c') \text{ و } \vec{u}(a, b, c)$$

للحصول على معادلة ديكارتية لـ (P) نتبع ما يلي :